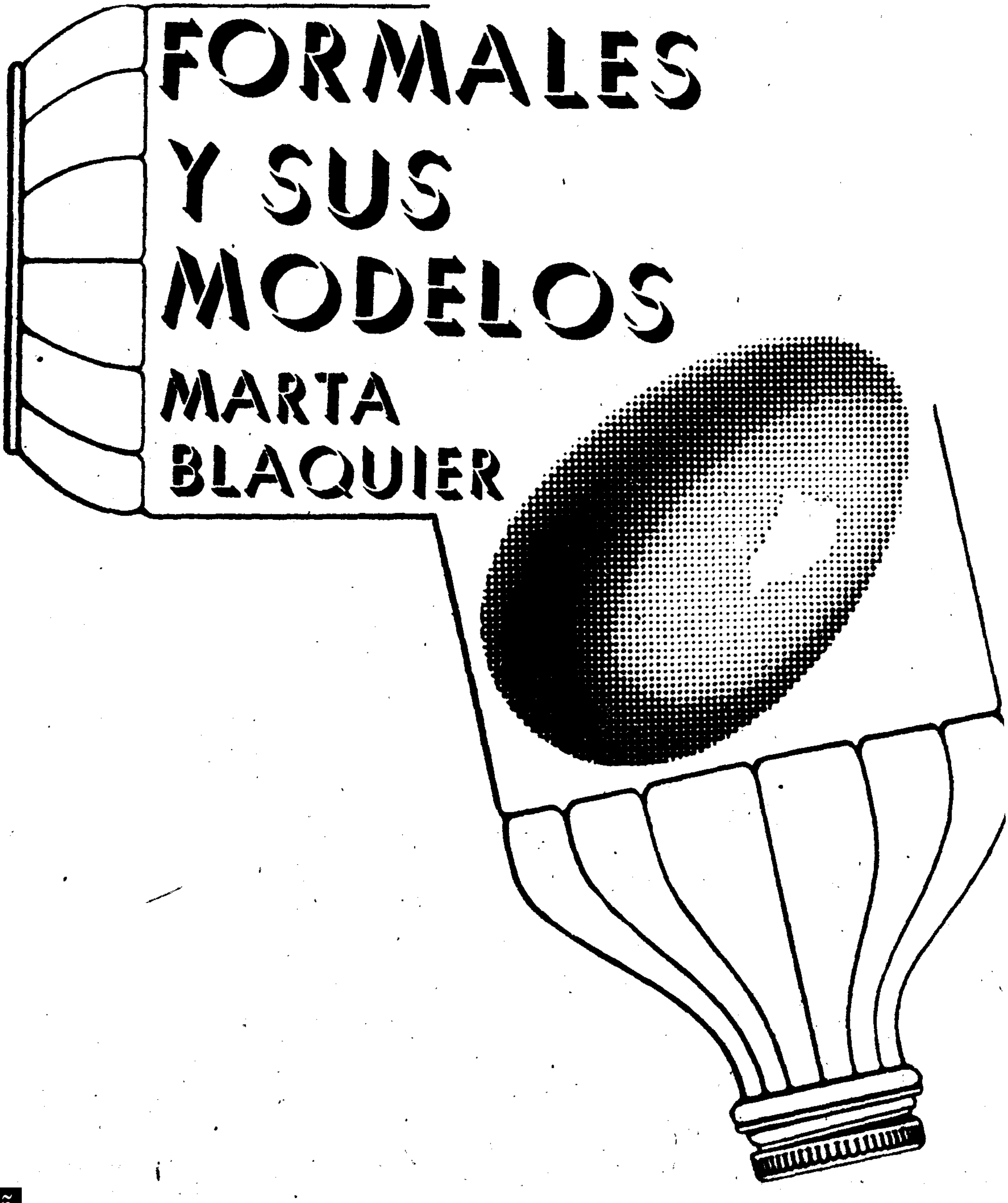
SISTEMAS FORMALES Y SUS MODELOS

MARTA BLAQUIER



En el lenguaje de diversas ciencias los términos 'sistema' y 'estructura' se utilizan como sinónimos.

Se entiende por estructura un **n**-tuplo ordenado (**n** objetos dados en un orden fijo) cuyo primer objeto es un conjunto no-vacío (llamado **conjunto base** de la estructura) y cuyos restantes objetos son **relaciones** entre los elementos del conjunto base o miembros de dicho conjunto. Toda estructura debe poseer al menos una relación.
Ejemplos:

1. El *par ordenado* (M, o) *donde* M ≡ {a, b} y o = { (a, a, b), (a, b, a), (b, a, a), (b, b, b) } es un sistema o estructura. El *conjunto base del sistema es* {a, b} *y el segundo término es una relación binaria en* {a, b}.

(M,o,b) es la estructura que obtenemos a partir de (M, o) al desplegar .a .b —elemento del conjunto base— como objeto de la estructura.

2. Del mismo modo, el par ordenado (N, +) donde N es el conjunto de los números naturales y + denota una relación que tiene como elementos todos los triplos ordenados de elementos de N, en los cuales el último elemento es la suma aritmética de los primeros dos elementos, es un sistema o estructura. Las estructuras señaladas anteriormente son **estructuras,** o **sistemas abstractos** ya que los elementos de sus conjuntos base —números, conjuntos, etc.— son entes abstractos con los cuales operan ciencias como la lógica y la matemática. Estos elementos en los sistemas que estudian otras ciencias serán desde partículas elementales hasta grupos sociales pasando por genes y agregados moleculares.

Retomemos el segundo de los ejemplos. De la estructura (N, +) pueden extraerse intuitivamente algunas propiedades tales como:

i) la suma de cualesquiera dos números naturales x e y es igual a un número natural. (Decimos que la estructura (N +) es cerrada para la operación suma).

ii) la suma de dos números naturales cualesquiera es conmutativa, lo que comúnmente se expresa diciendo que el orden de los sumandos no altera la suma.

Con ello, pretendemos señalar un primer paso —intuitivo— de aprehensión de las propiedades de estos sistemas abstractos, comenzando así la formulaciones teóricas de estas propiedades.

 Ha sido resultado del estudio algebraico de estas estructuras el hecho de que pueden ser agrupadas en diversas clases o familias al poseer las mismas propiedades y que sólo algunas de estas últimas resultan fundamentales para definirlas teóricamente. Además, el que sólo un mínimo de estas propiedades resultan suficientes a nivel teórico para extraer como **consecuencia lógica** las restantes propiedades de las estructuras que constituyen una clase o familia. De esta manera el algebra se erige en una teoría de estructuras de un cierto tipo.

A la formulación teórica así esbozada de las propiedades de una estructura dada se la denomina **teoría axiomática informal** de la estructura. En una axiomática informal, estarán presente los **axiomas** —propiedades primitivas del sistema— a partir de las cuales se deducirán las restantes propiedades del sistema llamadas **teoremas.** El mecanismo deductivo utilizado no se hace explícito.

Es posible sin embargo hacer explícita la lógica que subyace a una axiomática informal, y además precisar el lenguaje con el cual expresaremos las propiedades de los sistemas.

Constituye un paso más en el quehacer teórico de la lógica la explicitación de esa lógica subyacente a una teoría axiomatizada informalmente y la precisión del lenguaje con el cual expresamos las propiedades de los sistemas. Al sistema (formal) resultante de esta explicitación y precisión conjuntamente con los axiomas que expresan las propiedades de la teoría lo denominamos una **axiomática formal** de dicha teoría. Una **teoría formalizada** i. e. presentada axiomático-formalmente se constituye así en un **sistema formal.** El estudio de todo sistema formal se realiza en dos dimensiones: la dimensión sintáctica y la dimensión semántica.

En la dimensión **sintáctica** la teoría formalizada se estudia como un lenguaje (formal) en el cual se tiene en cuenta sus elementos (signos y expresiones definidas) y las relaciones entre sus elementos (relaciones entre los signos y relaciones entre las expresiones).

En la dimensión **semántica** la teoría formalizada se estudia como un sistema formal que hay que realizar en otro sistema que le sirve de modelo.

Decimos que una teoría se **realiza** si es posible encontrar una estructura o sistema en el cual todos sus enunciados demostrables —para los cuales existe una prueba— son cumplibles i. e., son verdaderos en dicha estructura.

Ofrecemos a continuación, a modo de ejemplo, los casos de una teoría lógica y una teoría matemática presentadas axiomático-formalmente.

1. *Para formalizar la teoría lógica de propposiciones es preciso construir un sistema formal al que llamaremos P.*

Primero **presentaremos** el sistema formal i, e, haremos una particular elección de símbolos y enunciaremos un conjunto de reglas para formar expresiones a expensas de dichos símbolos. Este objetivo es necesario por lo siguiente: cuando se trata de formalizar una teoría hay que empezar por formularla en un lenguaje en el cual se tenga un control preciso de las expresiones aceptables y las no aceptables.

Requerimos así un stock de símbolos que constituyen el **alfabeto** de nuestro lenguaje.

El alfabeto de P es:

a) *un conjunto infinito de signos denominados variables* p, q, r, p_1, q_1, r_1...,

b) tres signos denominados operadores lógicos.

— : *negación* (no)

V :conjunción (y) $\wedge$: alternativa (0)

La introducción de signos no primitivos se efectúa a través de definiciones que constituyen abreviaturas de las fórmulas de nuestro lenguaje así:

$$A \supset B = \text{df.} \overline{A} V B$$

c) dos signos auxiliares de agrupación: (,).

Daremos a continuación las **reglas de formación,** que determinan que sucesiones lineales finitas de símbolos son **fórmulas** en el sistema P.

Para evitar utilizar fórmulas específicas usaremos las mayúsculas A, B, C, como variables sintácticas que toman valores en el conjunto de fórmulas definidas en el sistema.

a) toda variable es una fórmula

b) si A es una fórmula $\overline{A}$ es una fórmula

c) Si A y B son fórmulas $A \vee B$, $A \wedge B$ son fórmulas.

d) Sólo son fórmulas las que resulten de la aplicación a), b), y c).

Seguidamente explicitaremos los **axiomas** o principios lógicos.

(1) $(A \vee A) \supset A$

(2) $A \supset (A \vee B)$

(3) $(A \vee B) \supset (B \vee A)$

(4) $A \supset B \supset \{ (C \vee A) \supset (C \vee B) \}$

estas expresiones por supuesto no pertenecen a P son **esquemas** de axiomas o **meta axiomas,** que darán lugar a un axioma de P al sustituir las variables sintácticas por fórmulas de P.

Enunciaremos la regla que describe el mecanismo deductivo dentro del sistema P, mediante el cual se estructuran demostraciones de fórmulas que denominaremos **teoremas.** Esta regla es llamada **Modus Ponens:**

$$\frac{A, \quad A \supset B}{B}$$

Si A y $A \supset B$ son axiomas o teoremas B resultará ser un teorema. Simbolizaremos por $\vdash$ B el enunciado «B es un teorema».

Por último dejaremos claramente establecido por una definición lo que constituirá una prueba o demostración en el sistema P.

Definición de prueba. Toda sucesión finita de fórmulas en la que cada fórmula es un axioma o un teorema o se deduce por la regla de deducción a partir de axiomas o teoremas que aparecen previamente, es la prueba de la fórmula final de la sucesión denominada teorema.

Queda así construido el sistema formal P.

2. La teoría elemental de grupo es un ejemplo típico de teoría matemática factible de ser formalizada. A su formulación subyace una lógica de predicado de primer orden. Veamos de la forma más simple posible en que consiste la presentación formal de dicha teoría.

Construiremos al igual que para la teoría lógica de proposiciones un sistema formal, al que llamaremos G.

El alfabeto de G es:

1) *un conjunto infinito de signos de variables individuales* $x, y, z, x_1, y_1, z_1 \ldots\ldots$

2) un signo de constante individual

$$e$$

3) un signo de constante funcional

$$o$$

4) un signo de relación

$$=$$

5) seis signos llamados operadores lógicos

— negación ('no') $\wedge$ conjunción ('.'y.'.) $\forall$ cuantificador universal ('para todo'..) $\vee$ alternativa ('.'o.'.) $\supset$ condicional (si... entonces...) $\exists$ cuantificador existencial (existe al menos un.'.).

Definiremos el conjunto de sucesiones lineales finitas de símbolos de nuestro lenguaje que constituyen **términos** y **fórmulas**; las únicas expresiones que necesitamos definir.

1a) una variable individual o una constante individual es un término.

1b) si *a* y *b* son términos a o b es un término

2a) si a y b son términos $a = b$ es una fórmula

2b) si A es una fórmula $\overline{A}$ es una fórmula

2c) si A y B son fórmulas $A \vee B$, $A \wedge B$ y $A \supset B$ son fórmulas.

Por ejemplo:

$x + y = z$

$x + y = y + x$

$x + e \neq x$

son fórmulas del sistema G. En estas fórmulas a las variables individuales se las considera con **ocurrencia libre.**

2d) Si A es una fórmula y x es una variable individual de ocurrencia libre en A, entonces $\forall x A$ y $\exists x A$ son fórmulas.

Si se realiza la operación de generalización o de existencia ($\forall$ o $\exists$) sobre estas expresiones se considera que las variables libres que aparecen al lado de los cuantificadores han sido **ligadas** por ejemplo en:

$\forall x \ \forall y \ \forall z \ (x + y = z)$

x, y o z son variables ligadas

$\forall x \ (x + y = y + x)$

x es ligada pero y es libre.

por último: utilizaremos como regla de deducción la de Modus Ponens vista anteriormente, la misma definición de prueba dada para P y los mismos axiomas. (Para los fines ilustrativos que perseguimos no se hace necesario la incorporación de nuevos axiomas).

El último paso en la construcción de G será explicitar los axiomas para la teoría de grupo.

1. $\forall x \ \forall y \ \forall z \ [x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z]$
2. $\forall x \ [x \circ e = x]$
3. $\forall x \ \exists y \ [x \circ y = e]$

con estos axiomas podemos demostrar el siguiente teorema:

(1) $\forall x \ \forall y \ [(x \circ y = e) \supset (y \circ x = e)]$

eliminando cuantificadores, lo cual es posible desde un punto de vista lógico-formal, tenemos:

$(x \circ y = e) \supset (y \circ x = e)$

supongamos que $x \circ y = e$, debemos mostrar que $y \circ x = e$.

Por el axioma 3 existe un miembro del conjunto base del sistema G tal que $y \circ z = e$

Así,

$$
\begin{aligned}
y \circ x &= (y \circ x) \circ e \text{ por axioma 2} \\
&= (y \circ x) \circ (y \circ z) \text{ ya que } y \circ z = e \\
&= [(y \circ x) \circ y] \circ z \text{ por axioma 1} \\
&= [y \circ (x \circ y)] \circ z \text{ por axioma 1} \\
&= (y \circ e) \circ z \text{ ya que } x \circ y = e \text{ por hipótesis} \\
&= y \circ z \quad \text{por axioma 2} \\
&= e
\end{aligned}
$$

quedando así establecido el teorema.

Cuando **presentamos** una teoría como un sistema formal operamos primero en la dimensión sintáctica del lenguaje de la teoría, razón por la cual aun el sistema formal por si mismo no indica el tipo de objetos específicos (ni sus relaciones) sobre los cuales se puede hablar con él.

Sin embargo podemos establecer una correspondencia entre los elementos y relaciones del sistema formal y los elementos y relaciones de otra estructura o sistema. Denominaremos realización al establecimiento de esta correspondencia.

Tomemos el sistema P. A continuación definiremos una estructura M para realizar P.

A las variables individuales de P le hacemos corresponder como valores un conjunto R de dos elementos tales que, $\mathbf{R} = \{T, F\}$ donde T es la abreviatura de 'verdadero' y F la de 'falso' i.e. se trata de los dos valores uno de los cuales corresponde a cada enunciado de una cierta teoría bajo una realización bivalente.

A los operadores lógicos corresponderán relaciones funcionales definidas en R o en $R \times R$, y con valores en R.
Por ejemplo:

a) La negación — es una función de R en R que queda definida de manera que al aplicar a T la negación $\overline{T}$ le hace corresponder F, y, al aplicarla a F $(\overline{F})$ se le hace corresponder T. De modo que

$$\overline{T} = F$$

$$\overline{F} = T$$

Un ejemplo ilustrativo de esto podemos encontrarlo en el lenguaje de la vida diaria, en el cual la negación de un enunciado verdadero da lugar a un enunciado falso y la negación de uno falso constituye un enunciado verdadero.

b) La alternativa V es una función de R X R en R que queda definida de manera que al aplicar la operación V a cualquier par ordenado del conjunto $R \times R$ le corresponderá T como valor al mismo sí y sólo si al menos uno de los elementos del par ordenado es verdadero y F si ambos elementos del par son falsos.

Un ejemplo ilustrativo es el siguiente.

El enunciado 'El número 3 es par o es primo' es un enunciado verdadero ya que uno de los enunciados elementales que lo componen 'el número 3 es primo' es verdadero.

c) La conjunción $\wedge$ queda definida de forma tal que al aplicar $\wedge$ a cualquier par ordenado del conjunto $R \times R$ le corresponde T como valor al mismo si y sólo si ambos elementos del par ordenado son verdaderos, y F cuando al menos uno de los elementos del par sea F.

Ofrecemos un ejemplo a continuación

El enunciado 'El número 2 es par y es primo' resulta ser un enunciado verdadero ya que los dos enunciados elementales que lo constituyen 'El número 2 es par' y 'El número 2 es primo' son verdaderos.

Y por último

d) La condicional $\supset$ es una función de $R \times R$ en R que queda definida de manera que al aplicar $\supset$ a cualquier par ordenado del conjunto $R \times R$ le corresponde F como valor al mismo si y solo si el primer elemento del par es T y el segundo es F, las posibles combinaciones restantes resultarían verdaderas.

Ejemplifiquemos esta definición

Analizando el enunciado 'Si el número 4 es par entonces es divisible por 3' vemos que el primer enunciado que lo integra, 'El número 4 es par' es verdadero mientras que el segundo 'El número 4 es divisible por 3' es falso, por lo cual el enunciado resultante es falso.

Esta realización hará de la estructura M un modelo del sistema formal P si a todos los enunciados demostrables teóricamente en P corresponden T en R por la realización.

Obviando la demostración de esto ofrecemos un ejemplo esclarecedor. Consideremos la prueba del teorema de P, $p \supset p$

1. $(A \supset B) \supset ((\overline{D} \vee A) \supset (D \vee B))$ esquema de axioma 4 donde C es $\overline{D}$

2. $A \supset B = \overline{A} \vee B$ por definición.

3. $(A \supset B) \supset [(D \supset A) \supset (D \supset B)]$ esquema de axioma 4 donde C es D

4. $((A \vee A) \supset A) \supset ((A \supset (A \vee A)) \supset (A \supset A))$ esquema de axioma 4 donde B es A

5. $(A \vee A) \supset A$ esquema de axioma 1

6. $(A \supset (A \vee A)) \supset (A \supset A)$ modus ponens de 4 y 5 A es $A \vee A$ y D es A

7. $A \supset (A \vee A)$ esquema de axioma 2

8. $A \supset A$ modus ponens de 6 y 7.

Al hacer que A tome como valor a p tenemos la prueba de $p \supset p$.

Al enunciado $p \supset p$ debe corresponder T en R por la realización.

Efectivamente, a los dos casos posibles, los pares ordenados (T T) y (F F) corresponde T por la realización según la definición dada de la condicional.

 Tomemos el sistema formal G.

Definamos una estructura S para realizar G, S será un modelo de G si y solo si a los enunciados demostrables en G corresponden enunciados verdaderos de S bajo la realización.

A las variables individuales x y z . . . hacemos corresponder los números enteros, a la constante individual e el número 0 y la constante funcional o la operación aritmética de adición (+).

Al signo de relación = hagámosle corresponder la igualdad aritmética y por último a los operadores lógicos, los que comúnmente se utilizan en la práctica matemática tal y como vimos en la realización del sistema P.

No cae dentro de los objetivos de este trabajo justificar que efectivamente la estructura S por la realización arriba definida es un modelo de G. Analicemos solamente el siguiente ejemplo.

Remitiéndonos al ejemplo (1) vemos que el teorema allí demostrado bajo la interpretación anterior se corresponde con un enunciado verdadero que con respecto a la estructura S nos dice que la suma de un elemento con su inverso en cualquier orden da como resultado el elemento idéntico de S.

Un ejemplo específico:

$$2+(-2)=(-2)+2=0$$

Esta correspondencia que hacemos de los elementos del sistema formal, que permite que el mismo tenga un referente específico constituye un modelo en el que se realiza la teoría elemental de grupo. Veamos otra realización de G.

Sea la estructura S′ cuyo conjunto base es {a b c}, y * una operación definida extensionalmente por {(a,a,a), (a,b,b), (a,c,c), (b,a,b), (b,b,c), (b,c,b), (c,a,c), (c,b,b), (c,c,b,)}

Un estudio detenido nos muestra que **a** es un elemento idéntico para la operación * ya que:

$$\forall x\ [x * a = x]$$

por otra parte vemos que:

$$\forall x\ \forall y\ \forall z\ [x * (y * z) = (x * y) * z]$$

por ejemplo:

$(a * b) * c + a * (b * c)$

$b * c \neq a * b$

$b = b$

También se tiene que:

$\forall x\, \exists y\, [x * y = y * x = e]$

por lo cual resulta evidente que S′ es un modelo para el sistema formal G por la realización definida.

Ambas realizaciones constituyen modelos para la teoría elemental de grupo lo que nos indica que la relación entre modelo y teoría no es unívoca ya que una teoría puede realizarse en más de un modelo.

A continuación presentaremos al lector de una forma más detallada y formal la noción de **modelo lógico.**

Analicemos primero la noción de **modelo de una fórmula**

Decimos que una fórmula A está **definida** en una estructura S si y sólo si a todo símbolo relacional de orden **n** que ocurre en A se le hace corresponder una relación **n**—aria de S y si cada constante individual que ocurre en A se le hace corresponder un miembro del conjunto base de S. Si la fórmula contiene alguna variable libre, se le hara corresponder como sus posibles valores elementos del conjunto base de S.

Por ejemplo, consideraremos la fórmula:

(1) $\forall x\, Fx \supset Fz \vee \forall x\, \exists y\, G\, x\, y$

donde F y G son símbolos relacionales monarios y binarios respectivamente.

y la estructura.

I ({ab}, {a}, { (a,a) (b,b) }, a)

cuyo conjunto base es {a b}

* Considérese todos los asteriscos de las fórmulas de las páginas 62-63 como situados al nivel de las letras (N.D.R.).

 introducimos una realización llamada ϕ de {F G z en {{a} { (a,a), (b,b) } a} definida de forma siguiente

ϕ F = {a}
ϕ G = { (a, a), (b, b) }
ϕ z = a

Decimos que bajo ϕ la fórmula (1) está definida en la estructura I Por esta vía podemos caracterizar el conjunto de enunciados que tienen sentido en una estructura dada. Llamamos a estos enunciados **fórmulas estructurales.**

Pasemos a definirla.

Sea **M** una estructura con un conjunto base M. Sea R una relación n- ária la cual es término de **M** y sea $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ un n-tuplo ordenado de miembros de M; entonces decimos que $(R\ a_1 \ldots a_n)$ es una fórmula estructural.

Consideraremos el siguiente ejemplo.

En la estructura II denotamos a {a} por T y la relación binaria { (a a) (b, b) } por R.

(Raa), (Rab), (Ra), (Ta), (Tb) son fórmulas estructurales.

Por último introduciremos la idea de **cumplibilidad** de una fórmula estructural en una estructura **M**.

Decimos que la fórmula estructural $(R\ a_1 a_2 \ldots a_n)$ es cumplible en **M** sí y sólo si $(a_1 a_2 \ldots a_n) \in R$ visto que R es una relación n-ario y miembro de **M** y $(a_1 \ldots a_n)$ es un n-tuplo ordenado de miembros del conjunto base de **M**.

Decimos que una estructura **M** es modelo de una fórmula A bajo una realizacón (correspondencia, mapping, función) ϕ sí y sólo si A es definida en **M** bajo ϕ y la fórmula estructural ϕ A es cumplible en la estructura **M**.

Consideremos ahora el conjunto de fórmulas K. Todas las fórmulas que pertenecen a K están definidas en la estructura **M** bajo una correspondencia ϕ. Decimos que **M** es un modelo de K bajo la correspondencia ϕ sí y sólo si **M** es un modelo de cada miembro de K bajo ϕ.

Por ejemplo tenemos el siguiente conjunto de fórmulas K = {∀xGxx, Fz ∧ ∀x Fx, Gzz}

Acorde con la estructura I y la realización ϕ presentadas anteriormente se tiene:

ϕ ∀x Gzz = ∀x Rxx

ϕ Fz v ∀x Fx = Ta v ∀x Tx

ϕ Gzz = Raa

cada una de estas fórmulas es cumplible en I, por consiguiente, la estructura I es un modelo de K bajo la realización ϕ

El estudio metamatemático. El sistema formal puede ser a su vez objeto de estudio e investigación. Este estudio es realizado por la *metamatemática que comprende la descripción o definición del sistema* formal y las propiedades de dicho sistema.

Analicemos las propiedades exigidas a los sistemas formales.

Se dice que un sistema formal es **consistente en sentido sintáctico** si no es posible derivar en él un enunciado y su negación lo que equivale a decir que todo enunciado del sistema no es derivable en él.

Veamos una presentación más rigurosa de esta definición.

Sea K un conjunto de fórmulas y B una fórmula cualquiera. Diremos que B es **deducible** de K (simbólicamente K ⊢ B) o es un **consecuencia** de K sí y sólo si existe un subconjunto finito de fórmulas tales que

$\{A_1 \ldots A_n\} \subset K$ y

$A_1 \vee A_2 \ldots \vee A_n \supset B.$

Consideremos a C [K] como el conjunto de todas las consecuencias del conjunto de enunciados K i e.

$C[K] = \{A / K \vdash A\}$

Definición. Diremos que K es **contradictoria** si C [K] es el conjunto de todas las fórmulas y así hemos definido también por exclusión cuando el conjunto de fórmulas K es consistente.

Definición. K es **consistente** si no es contradictoria.

 Resulta necesario para la prueba que queremos brindar la introducción del siguiente teorema.

Teorema 1. Si $K \vdash A$ y $K \vdash B$ entonces $K \vdash A \vee B$

Demostremos ahora el teorema que nos interesa.

Teorema 2. K es contradictorio si y solo si existe una fórmula B tal que $K \vdash B$ y $K \vdash \overline{B}$

Prueba (1) Supóngase que K es contradictorio. Entonces $K \vdash B$ y $K \vdash \overline{B}$ y que por la definición dada anteriormente tanto B como $\overline{B}$ pertenece a C [K]

(2) Supóngase que B es una fórmula tal que $K \vdash B$ y $K \vdash \overline{B}$

Entonces:

$K \vdash B \vee \overline{B}$ por el teorema anterior y para cualquier fórmula A, dado que $\vdash B \vee \overline{B} \supset A$ se tiene que $K \vdash A$ lo que deja establecido el teorema.

En sentido semántico un conjunto de fórmulas K es consistente si y solo si K posee un modelo, i.e. si existe una estructura **M** tal que todas las fórmulas del conjunto están definidas en **M** bajo la realización ϕ y las fórmulas estructurales resultantes de la realización son cumplibles en dicha estructura.

Un conjunto de fórmulas K es **completo** sí y sólo si para toda la fórmula definida en K, i. e. construida a partir del lenguaje de K, se tiene que $K \vdash A$ o $K \vdash A$. Dada esta definición un conjunto contradictorio es también complejo, de ahí que relacionando ambas propiedades el problema consiste siempre a la hora de buscar un conjunto K de fórmulas que axiomatice una teoría partir de un conjunto consistente dado y realizar extensiones completas que mantengan la consistencia, i.e. donde no toda fórmula sea teorema.

Un conjunto de fórmulas de K es **independiente** si y solo si ninguna fórmula a tal que $A \in K$ es deducible de $K \setminus \{A\}$, en el caso de una teoría axiomatizada cuando ningún axioma puede ser deducido de los restantes.

Por último llamamos a un sistema formal **categórico** si todos sus modelos son isomorfos entre sí.

Dos sistemas o estructuras **S** y **M** son isomorfos entre sí, si existe una correspondencia biunívoca ϕ del conjunto base de **S** en el conjunto base de **M** tal que en ϕ S = **M**

Así, dos modelos $\mathbf{M}_1$ y $\mathbf{M}_2$ son isomorfos sí y sólo si entre sus elementos existe una correspondencia biunívoca i.e. si a cada elemento de M_1 corresponde uno y solo uno de los elementos de M_2 de una forma tal que si un enunciado formado por los elementos de M_1 es cumplible entonces el enunciado formado mediante los elementos de M_2, imágenes de los primeros es igualmente cumplible y viceversa.